12.4.3 Zusammenhänge zwischen den FFT-Parametern

Durch die blockweise Transformation und die Diskretisierung im Zeit- und Frequenzbereich sind die Einstellparameter der FFT nicht unabhängig voneinander wählbar. Im Zeitbereich wird hierbei die *Blocklänge* T in N *Abtastwerte* mit einem *Abtastintervall* Δt zerlegt:

$$T = N \cdot \Delta t\,. \tag{12.17}$$

Der Frequenzbereich umfasst bis zur Abtastfrequenz f_S wiederum N Frequenzlinien mit dem *Linienabstand* (d. h. Frequenzauflösung) Δf:

$$f_S = N \cdot \Delta f\,. \tag{12.18}$$

Im Spektrum soll die *Höchstfrequenz* f_{max} dargestellt werden, die kleiner als die halbe Abtastfrequenz (Nyquist-Frequenz) ist. Somit wird hierfür geschrieben:

$$f_{max} < \frac{f_S}{2} = \frac{N}{2} \cdot \Delta f\,. \tag{12.19}$$

Das Spektrum des Frequenzbandes von $0 \ldots f_{max}$ stellt also nicht N Abtastwerte dar, sondern die Hälfte der verwendeten Abtastwerte N/2. Durch das Grundgesetz der Nachrichtentechnik (Unschärferelation) sind die Gln. 12.17 und 12.18 miteinander verknüpft.

$$T \cdot \Delta f = 1 \tag{12.20}$$

Anschaulich kann diese Gl. 12.20 so interpretiert werden, dass in einer Blocklänge $T = 0{,}5\,\text{s}$ eine Periode einer Sinusschwingung einer Frequenz von mindestens $\Delta f = 2\,\text{Hz}$ vollständig hineinpasst und an den Intervallgrenzen periodisch fortgesetzt werden kann. Die Bedingung ist auch für ganzzahlige Vielfache von Δf erfüllt. Damit hat Δf zwei Bedeutungen:

- Kleinste (von null verschiedene) Frequenz im Spektrum,
- Frequenzauflösung, d. h. Linienabstand.

In der Literatur wird die Frequenzauflösung Δf auch häufig mit der Bandbreite B bezeichnet. Damit ist nicht die Bandbreite $0 \ldots f_{max}$ des Signals im Spektrum gemeint. Vielmehr liegt der Bandbreite B die Vorstellung zugrunde, dass jede Frequenzlinie im Spektrum aus der schmalbandigen Filterung über Bandpassfilter mit einer Mittenfrequenz f_m und einer Bandbreite $B = \pm 1/2\,\Delta f$ erzeugt werden kann. Derartige FFT Analysatoren auf der Basis parallel geschalteter Bandpassfilter werden über sog. Filterbänke realisiert, sollen hier jedoch nicht weiter betrachtet werden.

In der FFT werden die Linienzahl N und die Höchstfrequenz f_{max} verwendet, um daraus die Frequenzauflösung Δf und die Blocklänge T zu berechnen. Für die Frequenzauflösung

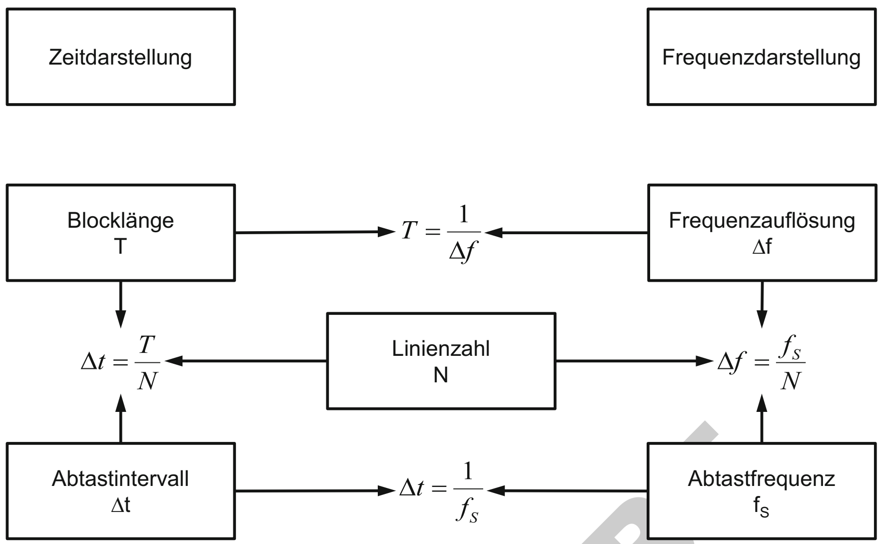

Abb. 12.18 Zusammenhang zwischen FFT-Parametern

Δf ergibt sich:

$$\Delta f = \frac{f_S}{N} = \frac{1}{T} \,. \tag{12.21}$$

In der Zeitdarstellung erhält man daraus das Abtastintervall Δt

$$\Delta t = \frac{1}{f_S} = \frac{T}{N} \tag{12.22}$$

und die Blocklänge T

$$T = \frac{N}{f_S} \,. \tag{12.23}$$

Das Abtastintervall Δt ist die Mindestforderung zur Einhaltung des Antialiasing, um die Höchstfrequenz f_{max} darzustellen. Aus den Gln. 12.21 und 12.22 ist ersichtlich, dass mit der Wahl von Abtastfrequenz f_S und Linienzahl N im Zeitbereich Blocklänge T und Abtastintervall Δt nicht mehr frei wählbar sind (Abb. 12.18).

► In der FFT sind von den vier Parametern (Blocklänge T, Abtastintervall Δt, Frequenzauflösung Δf und Abtastfrequenz f_S) nur zwei unabhängig wählbar. Die verbleibenden zwei Parameter sind damit festgelegt.

Abhängig vom verwendeten FFT-Analysator wird oft nur ein Teil der Linien dargestellt (Abschn. 12.4.2). In diesem Fall ist in den Gln. (12.17–12.23) die Abtastfrequenz f_S durch die Höchstfrequenz f_{max} zu ersetzen und die tatsächlich dargestellte Linienanzahl N' (z. B.

Tab. 12.4 Zusammenhang zwischen den FFT-Parametern für häufig dargestellte Linienzahlen und Höchstfrequenzen

Linienzahl N	1024	2048	4096	8192	16.384	1024	2048	4096	8192	16.384
dargestellte Linien N′	400	800	1600	3200	6400	400	800	1600	3200	6400
f_{max} in Hz	Blocklänge T in s					Frequenzauflösung Δf in Hz				
10	40	80	160	320	640	0,025	0,0125	0,00625	0,003125	0,0015625
20	20	40	80	160	320	0,05	0,025	0,0125	0,00625	0,003125
50	8	16	32	64	128	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125
100	4	8	16	32	64	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625
200	2	4	8	16	32	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125
500	0,8	1,6	3,2	6,4	12,8	1,25	0,625	0,3125	0,15625	0,078125
1000	0,4	0,8	1,6	3,2	6,4	2,5	1,25	0,625	0,3125	0,15625
2000	0,2	0,4	0,8	1,6	3,2	5	2,5	1,25	0,625	0,3125
5000	0,08	0,16	0,32	0,64	1,28	12,5	6,25	3,125	1,5625	0,78125
10.000	0,04	0,08	0,16	0,32	0,64	25	12,5	6,25	3,125	1,5625
20.000	0,02	0,04	0,08	0,16	0,32	50	25	12,5	6,25	3,125

$N' = 400$ Linien für $N = 1024$) anstelle von N zu verwenden. Diese Zusammenhänge sind für oft verwendete Linienzahlen in Tab. 12.4 aufgelistet.

Aus der Tab. 12.4 lassen sich folgende Zusammenhänge ablesen:

- Linienzahl: Eine Erhöhung der Linienzahl N′ bei konstanter Höchstfrequenz f_{max} erhöht die Frequenzauflösung Δf. Damit steigt jedoch die Blocklänge T (Messzeit) an.
- Höchstfrequenz: Erhöht man die Höchstfrequenz f_{max} bei konstanter Linienzahl N′, so verringert sich die benötigte Blocklänge T. Damit verringert sich jedoch die Frequenzauflösung Δf. Verdoppelt man gleichzeitig Höchstfrequenz f_{max} und Linienzahl N′, so bleiben die Blocklänge T und Frequenzauflösung Δf konstant.
- Messzeit: Für Signale mit vorgegebener Blocklänge T und Abtastrate Δt (z. B. aufgezeichnete Signale) sind die Linienzahl N′ und die Frequenzauflösung Δf definiert. Erhält man eine zu hohe Frequenzauflösung Δf (bei langer Messzeit), so kann man über mehrere Spektren mitteln (Abschn. 12.4.6).

Beispiel

Die Messaufgabe an einer Maschine gibt eine Höchstfrequenz $f_{max} = 1000$ Hz vor. Es steht ein FFT-Analysator mit 400 Linien zur Verfügung.

Wie lange dauert eine Messung?

Für 1000 Hz und 400 Linien liest man aus dem linken Teil der Tabelle eine Blockzeit $T = 0{,}4$ s ab.

Wie groß ist die kleinste Frequenz ($f > 0$) im Spektrum?

Für 1000 Hz und 400 Linien ergibt der rechte Teil Tabelle $\Delta f = 2{,}5$ Hz. Das ist der Wert der kleinsten, von null verschiedenen Linie im Spektrum (und gleichzeitig die Frequenzauflösung Δf). Der Frequenzbereich des verwendeten Schwingungsaufnehmers muss diese untere Grenzfrequenz abdecken.

Beispiel

Bei Durchführung einer Messaufgabe wird die zeitverzögerte Darstellung von Spektren bemängelt und geringe Rechnerleistung als Ursache vermutet. Für die Messaufgabe wurde eine Höchstfrequenz $f_{max} = 100$ Hz und eine Linienzahl von 1600 Linien gewählt.

Wie lange dauert eine Messung?

Für 100 Hz und 1600 Linien liest man aus dem linken Teil der Tabelle eine resultierende Blocklänge $T = 16$ s ab. Die Ursache der „langsamen" Darstellung liegt demnach in der Wahl der FFT-Parameter. Als Abhilfemöglichkeit kommen die Verringerung der Linienzahl oder Erhöhung der Höchstfrequenz in Frage.

Beispiel

Es soll das Spektrum eines aufgezeichneten Signals mit einer Dauer von 2 s und einem Abtastintervall von 1 ms ermittelt werden.

Wie groß sind die Linienzahl und Linienabstand?

Der Kehrwert des Abtastintervalls ist die Abtastfrequenz $f_s = 1000$ Hz. Damit gilt $f_{max} < 500$ Hz (Einhalten der Abtastbedingung). Sucht man im linken Tabellenteil die nächst kleinere Blocklänge (1,6 s) auf, so erhält man eine Linienzahl von 800 Linien und eine Frequenzauflösung von 0,625 Hz.

Von einem *Echtzeitbetrieb* (real-time analysis) spricht man dann, wenn die Ergebnisse der DFT schneller berechnet und dargestellt werden, als die Zeitdauer der Datenerfassung der Blocklänge T erfordert. Die Darstellung erfolgt dann in Blöcken mit dem Zeittakt T und wird nicht durch die Berechnung zusätzlich verzögert dargestellt. Praktisch erfolgt die Verarbeitung mit zwei Wechselpuffern pro Kanal. In einen Puffer wird die Blocklänge T eingelesen, in dem zweiten Puffer werden die Daten mit DFT verarbeitet.

12.4.4 Leakage und Fensterfunktionen

Aus der Forderung der DFT nach der periodischen Fortsetzung des Signals im Zeitbereich resultiert die Bedingung, dass der betrachtete Zeitausschnitt des Signals mit der Blocklänge T periodisch aneinandergereiht und somit an beiden Intervallgrenzen des Zeitfensters